Fehlerrechnung

Aufgabe 1

Man leite die Beziehungen

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\sum_{i=1}^{N}x_iy_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}\quad\text{und}\quad b=\frac{N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\sum_{i=1}^{N}y_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}$$

aus den Angaben

$$\sum_{i=1}^{N}2\cdot(a+bx_i-y_i)=0\quad\text{und}\quad\sum_{i=1}^{N}2\cdot(a+bx_i-y_i)x_i=0$$

im einzelnen ab und prüfe für den Fall N = 2 nach, ob sich die erwarteten Werte

$$a=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}\quad\text{und}\quad b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ergeben.

$$\sum_{i=1}^{N}2(a+bx_i-y_i)=0$$

$$2\cdot\sum_{i=1}^{N}(a+bx_i-y_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}(a+bx_i-y_i)=0$$

$$N\cdot a+b\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i-\sum_{i=1}^{N}y_i=0$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i-b\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}\qquad(1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2\cdot(a+bx_i-y_i)x_i=0$$

$$a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i + b\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad (2)$$

(2) in (1)

$$N\cdot a=\sum_{i=1}^{N} y_i-\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\left(N\cdot a-\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2=-\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i y_i + a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$N\cdot a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\sum_{i=1}^{N} x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i = a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i-\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$N\cdot a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2-a\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i=\sum_{i=1}^{N} x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i-\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i-\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i-\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

(1) in (2)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i - b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

$$b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i - b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

$$b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i + b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

$$b \cdot N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i + b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$b \cdot N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i = N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Für $N = 2$:

$$a = \frac{(y_1 + y_2)\cdot(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)\cdot(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{2\cdot(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}$$

$$a = \frac{x_1^2 y_1 + x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 + x_2^2 y_2 - x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1 - x_2^2 y_2}{2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2}$$

$$a = \frac{x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}$$

$$a = \frac{x_2 y_1 (x_2 - x_1) - x_1 y_2 (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{(x_2 - x_1)}$$

$$b = \frac{2\cdot(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 + x_2)\cdot(y_1 + y_2)}{2\cdot(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}$$

$$b = \frac{2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2}{2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2}$$

$$b = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}$$

$$b = \frac{y_2 (x_2 - x_1) - y_1 (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aufgabe 2

Für die Größe W erhält man aus verschiedenen Versuchen die Werte

x_i	58.3	58.5	58.1	58.2	58.8	58.4	58.6	58.5
$x_i - \bar{x}$	– 0.13	0.07	– 0.33	– 0.23	0.37	– 0.03	0.17	0.07

Man berechne den Mittelwert, die Standardabweichung und den mittleren Fehler des Mittelwertes.

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{467.4}{8} = 58.43$$

Standardabweichung:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.3552}{7}} = 0.23$$

Standardabweichung des Mittelwertes:

$$S\left(\bar{x}\right) = \frac{S(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N \cdot (N-1)}} = \sqrt{\frac{0.3552}{56}} = 0.08$$

Aufgabe 3

Eine Kugel bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit u auf einer linearen Bahn. Zu mehreren Zeiten t_i wird der Abstand z_i der Kugel von einem Bezugspunkt aus gemessen. Man erhält die folgenden Werte:

t_i in s	0	1	2	3	4	5	6
z_i in cm	2.1	4.7	7.6	11.8	14.1	16.5	20.4

Für die Bewegung der Kugel gilt:

$$z_i = z_0 + u \cdot t_i$$

Man bestimme u und z_0. Man gebe den Wert der Fehlerquadratsumme, die Standardabweichung von z_i sowie die mittleren Fehler von u und z_0 an.

$$\sum_{i=1}^{7} t_i = 21\,\text{s} \qquad \sum_{i=1}^{7} z_i = 77.2\ \text{cm} \qquad \sum_{i=1}^{7} t_i \cdot z_i = 316.6\ \text{cm} \cdot \text{s} \qquad \sum_{i=1}^{7} t_i^2 = 91\ \text{s}^2$$

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i - \sum_{i=1}^{N} t_i \cdot \sum_{i=1}^{N} t_i z_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} = \frac{77.2 \cdot 91 - 21 \cdot 316.6}{7 \cdot 91 - 21^2} = \frac{376.6}{196} = 1.921\,\text{cm}$$

$$u = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} t_i z_i - \sum_{i=1}^{N} t_i \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} = \frac{7 \cdot 316.6 - 21 \cdot 77.2}{7 \cdot 91 - 21^2} = \frac{595}{196} = 3.036\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Regressionsgerade:

$$z_i = 1.921 + 3.036 \cdot t_i$$

t_i in s	0	1	2	3	4	5	6
z_i in cm	2.1	4.7	7.6	11.8	14.1	16.5	20.4
$\bar{z}_i$ in cm	1.92	4.96	7.99	11.03	14.07	17.10	20.13
S	0.0324	0.0676	0.152	0.5929	0.0009	0.3600	0.0729

Fehlerquadratsumme:

$$S = \sum_{i=1}^{7} \left(\bar{z}_i - z_i\right)^2 = 1.28\ \text{cm}^2$$

Standardabweichung:

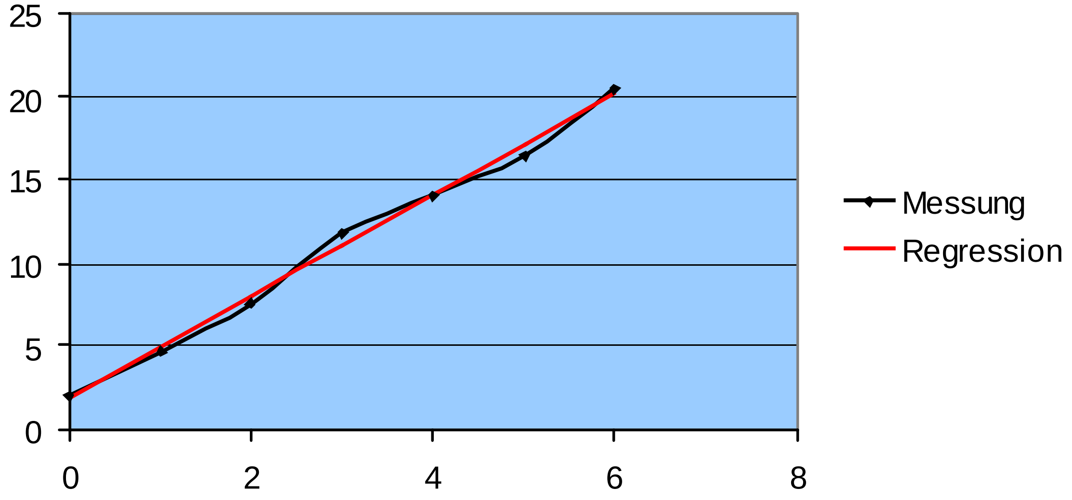
$$S_{z_i} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{1.28}{5}} = 0.51\ \text{cm}$$

Mittlerer Fehler von z_0:

$$m_{z_0} = S_{z_i} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7} t_i^2}{N \cdot \sum_{i=1}^{7} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} t_i\right)^2}} = 0.51 \cdot \sqrt{\frac{91}{7 \cdot 91 - 21^2}} = 0.35\ \text{cm}$$

Mittlerer Fehler von u:

$$m_u = S_{z_i} \cdot \sqrt{\frac{N}{N \cdot \sum_{i=1}^{7} t_i^2 - \left(\sum_{i=2}^{7} t_i\right)^2}} = 0.51 \cdot \sqrt{\frac{7}{7 \cdot 91 - 21^2}} = 0.096\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$



Aufgabe 4

Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille hängt die Strömungsgeschwindigkeit v eines Gases durch ein Rohr mit dem Innendurchmesser d über die Beziehung

$$v = \text{const} \cdot d^4$$

zusammen. d wurde zu 0.2 ± 0.01 mm bestimmt. Wie groß ist der relative Fehler von v?

$$\Delta v_{rel} = \frac{4 \cdot \Delta d_{abs}}{d} = \frac{4 \cdot 0.01\ \text{mm}}{0.2\ \text{mm}} = 0.2 = 20\%$$

Aufgabe 5

Um eine elektrischen Widerstand nach der Formel $R = \frac{U}{I}$ zu bestimmen, werden je 10 Messungen von U und I vorgenommen.

Messung	Stromstärke I in A	Spannung U in V
1	4.4	221
2	4.2	222
3	4.3	219
4	4.3	221
5	4.1	219
6	4.0	218
7	4.5	220
8	4.3	221
9	4.4	220
10	4.3	219

Wie groß ist der Mittelwert, die Streuung der einzelnen Messung und der mittlere Fehler des Mittelwertes von I und U?

Wie groß ist bei der Messung von I und U jeweils der relative Fehler?

Wie groß ist der Mittelwert und der mittlere Fehler in R?

Geben Sie die Ergebnisse für die statistische Sicherheit P = 0.95 an.

Messung	I in A	$v_{i_I} = I_i - \bar{I}$	U in V	$v_{i_U} = U_i - \bar{U}$	$R = \frac{U}{I}$	$v_{i_R} = R_i - \bar{R}$
1	4.4	0.12	221	1	50.23	– 1.23
2	4.2	– 0.08	222	2	52.86	1.40
3	4.3	0.02	219	– 1	50.93	– 0.53
4	4.3	0.02	221	1	51.40	– 0.06
5	4.1	– 0.18	219	– 1	53.41	1.95
6	4.0	– 0.28	218	– 2	54.50	3.04
7	4.5	0.22	220	0	48.89	– 2.57
8	4.3	0.02	221	1	51.40	– 0.06
9	4.4	0.12	220	0	50.00	– 1.46
10	4.3	0.02	219	– 1	50.93	– 0.53
	$\bar{I} = 4.28$	0.196	$\bar{U} = 220$	14	$\bar{R} = 51.46$	25.82
	Mittelwert	$\sum (v_{i_I})^2$	Mittelwert	$\sum (v_{i_U})^2$	Mittelwert	$\sum (v_{i_R})^2$

Streuung der einzelnen Messung:

$$S(I) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_I})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{0.196\ A}{9}} = 0.148\ A$$

$$S(U) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_U})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{14\ V^2}{9}} = 1.25\ V$$

$$S(R) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_R})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{25.82\ \Omega^2}{9}} = 1.69\ \Omega$$

Streuung des Mittelwertes:

$$S\left(\bar{I}\right)=\frac{S(I)}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(v_{i_I}\right)^2}{10\cdot(10-1)}}=\sqrt{\frac{0.196\ A^2}{90}}=0.05\ A$$

$$S\left(\bar{U}\right)=\frac{S(U)}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(v_{i_U}\right)^2}{10\cdot(10-1)}}=\sqrt{\frac{14\ V^2}{90}}=0.39\ V$$

$$S\left(\bar{R}\right)=\frac{S(R)}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(v_{i_R}\right)^2}{10\cdot(10-1)}}=\sqrt{\frac{25.82\ \Omega^2}{90}}=0.53\ \Omega$$

Relativer Fehler der Messung:

$$\Delta I_{rel}=\frac{t\cdot S\left(\bar{I}\right)}{\bar{I}}\cdot 100\ \% =\frac{2.26\cdot 0.05\ A}{4.28\ A}\cdot 100\ \%=2.6\ \%$$

$$I_W=4.28\ A\pm(2.26\cdot 0.05\ A)=4.28\ A\pm 0.11\ A$$

$$\Delta U_{rel}=\frac{t\cdot S\left(\bar{U}\right)}{\bar{U}}\cdot 100\ \% =\frac{2.26\cdot 0.39\ V}{220\ V}\cdot 100\ \%=0.4\ \%$$

$$U_W=220\ V\pm(2.26\cdot 0.39\ V)=220\ V\pm 0.88\ V$$

Dieses Protokoll wurde selbstständig erstellt.

Benjamin Bulheller