Bestimmung der Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher

$f : R^2 \to R$; entwickeln um $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$

Taylorpolynom 2. Grades:

Vektorform:

$$f(x) \approx f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(x_0) \circ (\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) + (\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) \tfrac{1}{2} \circ Hess(x_0) \circ (\vec{x} - \overrightarrow{x_0})$$

Vektor Vektor Vektor Matrix Vektor

Matrix x Vektor → Vektor ; Vektor x Vektor →Skalar

Gradient: $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow P_1(x_1, y_1)...$ gibt die kritischen Punkte an.

Hessematrix: $Hess = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

hier werden die kritische Punkte eingesetzt

Wenn Hessematrix des kritischen Punktes:
positiv definit→Minimum
negativ definit→Maximum
indefinit: Sattelpunkt

Kriterium für Definitheit einer Matrix A:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ *positiv* definit falls: 1. $a_{1,1} > 0$ → $f_{xx} > 0$

2. $\det \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0$ d.h in diesem Fall

$$\det \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} - f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ *negativ* definit falls (–A) positiv definit

alles andere ist indefinit.

Mehrfachintegrale

1. Im allgemeinen wird die Dimension des Integrationsgebietes erhöht.
2. $$\int_S f(x,y)ds = \int_a^b \int_{j(x_1)}^{j(x_2)} f(x,y)dydx$$
   Integration von „innen“ nach „außen“
   Beim Vertauschen auf die Integrationsgrenzen achten!

3. Doppelintegrale
   a. Fläche
   b. Rauminhalt eines geraden Körpers

4. Dreifachintegrale beschreiben das Volumen eines Körpers im Raum

5. Variablentransformationen:

Transformation Doppelintegral: kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten

$x, y \to r, \Phi$ mit $x = r\cos(\Phi)$
und $y = r\sin(\Phi)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_{r_1}^{r_2} \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} F(r,\Phi)rd\Phi dr$$

Transformation Dreifachintegral: kartesische → Kugelkoordinaten

$x.y.z \to r, \Phi, q$ ´ mit: $x = r\cos(\Phi)\sin(q)$
$y = r\sin(\Phi)\sin(q)$
$z = r\cos(q)$

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iiint F(r,\Phi,q)r^2\sin(q)dqd\Phi dr$$

Lösungen von linearen Gleichungssystemen

Allgemein : $A \bullet \vec{x} = \vec{b}$ mit A als Koeffizientenmatrix und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ : \\ b_n \end{pmatrix}$

Der Rang von A heißt Rang des LGS =n $\vec{x} = \vec{0}$ heißt *triviale* Lösung

Fallunterscheidung:

Homogenes LGS ($\vec{b} = \vec{0}$) Inhomogens LGS($\vec{b} \neq \vec{0}$)

I Regulärer Fall: A ist invertierbar (det|A|≠0, Rang A =n)
Die Inversion wird mittels Gauss-Jordan Algorithmus ausgeführt.

$$A \bullet \vec{x} = \vec{0} \mid \bullet A^{-1}$$
$$A \bullet A^{-1} \bullet \vec{x} = A^{-1} \bullet \vec{0}$$
$$E \bullet \vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} = \vec{0}$$

! Damit es für ein homogenes LGS weitere Lösungen außer der trivialen gibt, muß daher det|A|=0 sein!

$$A \bullet \vec{x} = \vec{b} \mid \bullet A^{-1}$$
$$A \bullet A^{-1} \bullet \vec{x} = A^{-1} \bullet \vec{b}$$
$$E \bullet \vec{x} = A^{-1} \bullet \vec{b}$$
$$\vec{x} = A^{-1} \bullet \vec{b}$$

Die letzte Zeile ist die Lösung des LGS(ein Vektor, d.h. <u>ein</u> Punkt)

II singulärer Fall (A nicht invertierbar, det|A|=0, Rang A <n)
S=elementare Umformung

$$A \bullet \vec{x} = \vec{0} \,|\mathrm{S}$$
$$\downarrow \text{Gauss}$$
$$B \rightarrow SA \bullet \vec{x} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & B_{21} & \dots & B_{2n} \\ 0 & 0 & B_{rr} \dots & B_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_r \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}$$

dim L= n-r

$$A \bullet \vec{x} = \vec{b} \,|\mathrm{S}$$
$$\downarrow \text{Gauss}$$
$$B \rightarrow SA \bullet \vec{x} = S\vec{b} \leftarrow \vec{c}$$
$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & B_{21} & \dots & B_{2n} \\ 0 & 0 & B_{rr} \dots & B_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_r \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ x_r \\ : \\ c_n \end{pmatrix}$$

<u>1.Fall</u> $c_{r+1} \dots c_r = 0, Rang(A\vec{b}) = Rang(A)$
dimL = n-r (Lösung ist eine Gerade, Ebene oder Raum mit 0 als Ursprung)

<u>2.Fall</u> $c_r \neq 0, Rang(A\vec{b}) \neq Rang(A)$
L={}

Dimensionsformel: Rang A + dim L = n

Der Lösungsraum eines homogenen LGS bildet einen linearen Unterraum (Untervektorraum) von R^n

Der Lösungsraum eines inhomogenen LGS einen affinen Unterraum zu R^n

Wegunabhängigkeit eines Vektorfeldes

Aufgabe:

Gegeben ist ein Vektorfeld f
Man soll bestimmen ob es wegunabhängig integrierbar ist oder nicht.

Vorgangsweise:

Es muß gelten: $\vec{f} = \vec{\nabla} F$
das heißt, daß folgendes Kriterium erfüllt sein muß:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad wobei\ i \neq j\ ist$$

man bildet also die partielle Ableitung der i - ten Komponente des Vektors nach x_j und untersucht, ob diese gleich der partiellen Ableitung der j - ten Komponente des Vektors nach x_i ist.
Ist dieses bei allen Komponenten der Fall, so handelt es sich um ein Gradientenfeld und die Wegunabhängigkeit des Integrals ist erfüllt.

Beispiele:

zweidimensional :

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$
man soll bestimmen ob es sich um ein **Gradientenfeld** handelt
man leitet also die erste Komponente (x^2) partiell nach y ab

$$\frac{\partial f_1(= x^2)}{\partial y} = 0$$

anschließend leitet man die zweite Komponente (y^2) partiell nach x ab

$$\frac{\partial f_2(= y^2)}{\partial x} = 0$$

man sieht, daß die Ergebnisse gleich sind und somit handelt es sich um ein **Gradientenfeld**.

dreidimensional :

analog zum zweidimesionalen, allerdings muß man berücksichtigen, daß nun das Vektorfeld aus drei Komponenten besteht:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

somit müssen gleich drei Bedingungen erfüllt sein, damit $\vec{f}$ *unabhängig vom Weg integrierbar* ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}$$

Lösung eines Eigenwertproblems $(A - l\ E)\vec{x} = 0$

Schritt 1 :

Lösen der charakteristischen Gleichung : $\det(A - l\ E) = 0$

Beispiel :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - l * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 1-l & 2 \\ 2 & 1-l \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1-l)*(1-l) - 2*2 = 0 \Rightarrow (1-l)^2 = 4 \Rightarrow -l + 1 = \pm 2 \Rightarrow l_1 = -1, l_2 = 3$$

Schritt 2 :

Einsetzen in ein homogenes lineares Gleichungssystem um $\vec{x}$ zu ermitteln

Beispiel : (man muß das Gleichungssystem sowohl für l_1 als auch für l_2 lösen

für l_1 :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] * \vec{x}_1 = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

analog :.... $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 3 :

Normierung der Eigenvektoren $\vec{x}$, das heißt auf Länge 1 bringen

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$