Begriff der Zustandsfunktion

man unterscheidet zwischen:

Zustandsfunktionen	Wegfunktionen
hängen nur vom gegenwärtigen Zustand des Systems ab, sie sind unabhängig davon, wie dieser Zustand erreicht wurde	abhängig von dem Weg, wie der Zustand erreicht wurde
$\Delta U = \int_A^E dU = U_E - U_A$	$q = \int_{A,Weg}^{E} dq$
*d*U wird vollständiges Differential genannt.	*d*q ist ein unvollständiges Differential.

Was ist ein vollständiges Differential?

exakte Definition:

Der Definitionsbereich D(f) einer Funktion f enthalte eine Umgebung des Punktes $P_0(x_1^0,....,x_n^0) \in D(f)$. f heißt in P_0 total (vollständig) differenzierbar, wenn für alle $P(x_1,...,x_n) \in D(f)$ die Zerlegung $f(P) - f(P_0) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0) + d(P_0, P)R(P)$ mit $\lim_{P \to P_0} R(P) = 0$ gilt. Der lineare Anteil $df(P) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0)$ heißt totales (vollständiges) Differential.

Vereinfacht: totales Differential $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Wann ist einen Funktion eine Zustandsfunktion?

Lässt sich eine Funktion als ein vollständiges Differential schreiben, handelt es sich um eine Zustandsfunktion

Wann ist *d*f ein vollständiges Differential?

Man betrachtet $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \vec{\nabla} \vec{f} d\vec{x}$. *d*f ist nur dann ein vollständiges Differential, wenn gilt: $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \vec{f} = 0}$, also zum Beispiel im dreidimensionalen Fall:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = 0$$

Satz von Schwarz

f sei in einer Umgebung $U(P_o)$ von $P_o \in R^n$ stetig. Existieren die partiellen Ableitungen f_{x_k}, f_{x_l}, $f_{x_k x_l}$ in $U(P_o)$ und sind diese in P_o stetig, dann existiert auch die partielle Ableitung $f_{x_l x_k}$ in P_o, und es gilt: $f_{x_l x_k}(P_0) = f_{x_k x_l}(P_0)$

Was versteht man unter einem Kreisintegral?

Ein Kreisintegral ist ein Integral, wo der Anfang und der Endpunkt zusammenfallen (man integriert auf einem geschlossenen Integrationsweg).

Man betrachtet das Kreisintegral $\oint \vec{f}(\vec{x})\,d\vec{x}$:

$$\oint_C \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} = 0 = \int_{\substack{C_1 \\ A\to B}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} + \int_{\substack{C_2 \\ B\to A}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} = \int_{\substack{C_1 \\ A\to B}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} - \int_{\substack{C_3 \\ A-B}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} \Rightarrow \int_{\substack{C_1 \\ A\to B}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} = \int_{\substack{C_3 \\ A\to B}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x}$$

Setzt man nun für C_1 und C_3 beliebige Wege ein und erhält stets das selbe Ergebnis, handelt es sich bei $\vec{f}(\vec{x})$ um eine Zustandsfunktion.